Prueba de hipótesis: Tipo de error , hipótesis nula y alternativa, prueba unilateral y bilateral, nivel de significación

📌 ¿Qué es una hipótesis en estadística?

En estadística, una **hipótesis** es una **afirmación o suposición** sobre una característica de una población (como su media, proporción o varianza) que se quiere **probar con datos**.

✅ 1. Hipótesis nula (H_0)

Es la afirmación que se considera **cierta por defecto** hasta que se demuestre lo contrario. Representa la **ausencia de efecto, cambio o diferencia.**

- Se escribe generalmente con un **igual** (=):
    - Ejemplo: $H_0 : \mu = 50$
    - Significa: "*la media poblacional es igual a 50*"

✅ 2. Hipótesis alternativa (H_1 o H_a)

Es la afirmación que representa lo que el investigador **sospecha o quiere demostrar.**

Se formula de tres formas:

Tipo de prueba	Hipótesis alternativa	¿Qué se quiere demostrar?
Bilateral	$H_1 : \mu \neq \mu_0$	Que hay una diferencia
Unilateral superior	$H_1 : \mu > \mu_0$	Que es mayor que lo supuesto
Unilateral inferior	$H_1 : \mu < \mu_0$	Que es menor que lo supuesto

🎯 3. **Zona de aceptación y zona de rechazo**

Estas zonas se definen sobre la **distribución del estadístico de prueba** (por ejemplo, una z o t).

- La **zona de aceptación** es donde se **mantiene** H_0.
- La **zona de rechazo** es donde se **rechaza** H_0, indicando evidencia a favor de H_1.

Se delimitan por **valores críticos**, determinados por el **nivel de significación** α.

□ 4. Nivel de significación (α)

Es la **probabilidad máxima** que estamos dispuestos a aceptar de **rechazar** H_0 cuando en realidad es verdadera (error tipo I).

Valores típicos:

- $\alpha = 0.05$ (5%)
- $\alpha = 0.01$ (1%)

🔎 5. Valor crítico y región de rechazo

- Para $\alpha = 0.05$, en una prueba bilateral, se reparte:
  - $\alpha/2 = 0.025$ en cada cola
  - Valores críticos: $z = \pm 1.96$

📘 6. **Decisión estadística**

- Si el estadístico de prueba (z, t, etc.) **cae dentro de la zona de aceptación → no se rechaza** H_0
- Si cae en la **zona de rechazo → se rechaza** H_0

📚 1. Hipótesis nula y alternativa

- **Hipótesis nula (H_0):**

  Es una afirmación que se somete a prueba. Usualmente representa la idea de "no hay efecto", "no hay diferencia" o "la situación actual".

  Ejemplo:

  $H_0 : \mu = 50$ (la media es igual a 50)

- **Hipótesis alternativa (H_1 o H_a):**

  Representa lo que se quiere demostrar. Puede ser:

  - **Bilateral:** $\mu \neq 50$
  - **Unilateral superior:** $\mu > 50$
  - **Unilateral inferior:** $\mu < 50$

□ ¿Qué son los errores en las pruebas de hipótesis?

Cuando se toma una decisión estadística (rechazar o no rechazar H_0), **existe la posibilidad de equivocarse**, y estos errores se clasifican en **dos tipos:**

🔴 1. Error Tipo I (α)

➤ Significado:

Es rechazar la hipótesis nula H_0 cuando en realidad es verdadera.

➤ Ejemplo educativo:

Una universidad cree que el promedio de ingreso de los estudiantes es $\mu = 70$.

Rechazas esta afirmación (dices que no es 70), pero en realidad sí lo es.

🔁 Es como dar un diagnóstico falso positivo.

🔐 Nivel de significación:

El **nivel de significación** α es la **probabilidad máxima aceptada** de cometer un error tipo I.

Ejemplo:

- Si $\alpha = 0.05$, aceptas un **5% de riesgo** de rechazar injustamente una afirmación verdadera.

📊 Comparación de errores

Decisión \ Realidad	H_0 verdadera	H_0 falsa
No rechazar H_0	✅ Correcto	❌ Error tipo II
Rechazar H_0	❌ Error tipo I	✅ Correcto

🔵 2. Error Tipo II (β)

➤ Significado:

Es **no rechazar** H_0 cuando en realidad **es falsa**.

➤ Ejemplo educativo:

Supón que el rendimiento promedio de estudiantes **sí ha bajado** (realmente $\mu < 70$), pero **no detectas la diferencia**, y mantienes H_0.

🔁 Es como **dar un falso negativo**.

🎯 ¿Por qué se llama **bilateral**, **unilateral superior** o **inferior**?

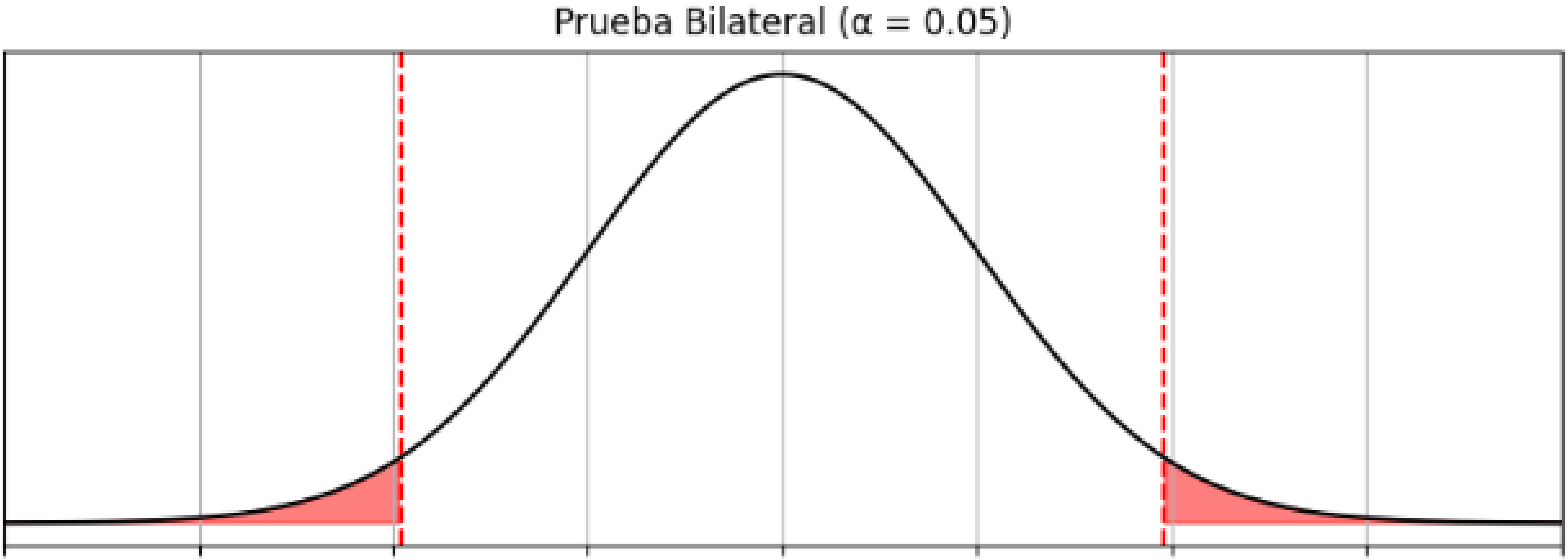
La denominación se refiere a qué parte de la distribución del estadístico de prueba se analiza para rechazar la hipótesis nula H_0:

✅ 1. Prueba bilateral

Se analiza si el valor observado está en **cualquiera de los dos extremos** (izquierdo o derecho) de la distribución.

- $H_0 : \mu = \mu_0$
- $H_1 : \mu \neq \mu_0$

🔎 Aquí, cualquier desviación **significativa por arriba o por abajo** de μ_0 es considerada evidencia contra H_0


Prueba Bilateral (α = 0.05)

📈 Explicación del gráfico

En la imagen:

- La **curva negra** representa la **distribución normal estándar** (simétrica, con media = 0).
- Las **zonas rojas sombreadas** representan las **regiones críticas** o de **rechazo** de H_0.
- La probabilidad total de esas dos colas es igual al **nivel de significación α = 0.05**.

  Esto significa que:

  - Cada cola contiene $\frac{0.05}{2} = 0.025$
- Las **líneas rojas punteadas** indican los **valores críticos**:
  - A la izquierda: $z = -1.96$
  - A la derecha: $z = +1.96$

🎯 Ejemplo real: Calidad de producción

Situación:
Una fábrica produce tabletas que deben tener en promedio **500 mg de principio activo.** Se sospecha que **la máquina puede haberse desajustado**, y queremos verificar si **la media ha cambiado**, sin importar si es por exceso o por defecto.

🔍 Paso 1: Hipótesis

- $H_0 : \mu = 500$ (la máquina funciona correctamente)
- $H_1 : \mu \neq 500$ (la máquina está desajustada)

Este es un caso **bilateral**, porque no sabemos en qué dirección puede estar el cambio.

🔢 Paso 2: Datos

- Muestra de $n = 36$ tabletas
- Media muestral: $\bar{x} = 495$ mg
- Desviación estándar poblacional: $\sigma = 15$ mg
- Nivel de significación: $\alpha = 0.05$

□ Paso 3: Cálculo del estadístico z

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

□ Paso 3: Cálculo del estadístico z

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{495 - 500}{15/\sqrt{36}} = \frac{-5}{2.5} = -2.0$$

✅ Paso 4: Comparar con valores críticos

Como el valor z = -2.0 está:

$$\text{fuera del intervalo } [-1.96, +1.96] \Rightarrow \text{está en la zona de rechazo}$$

📌 Conclusión:

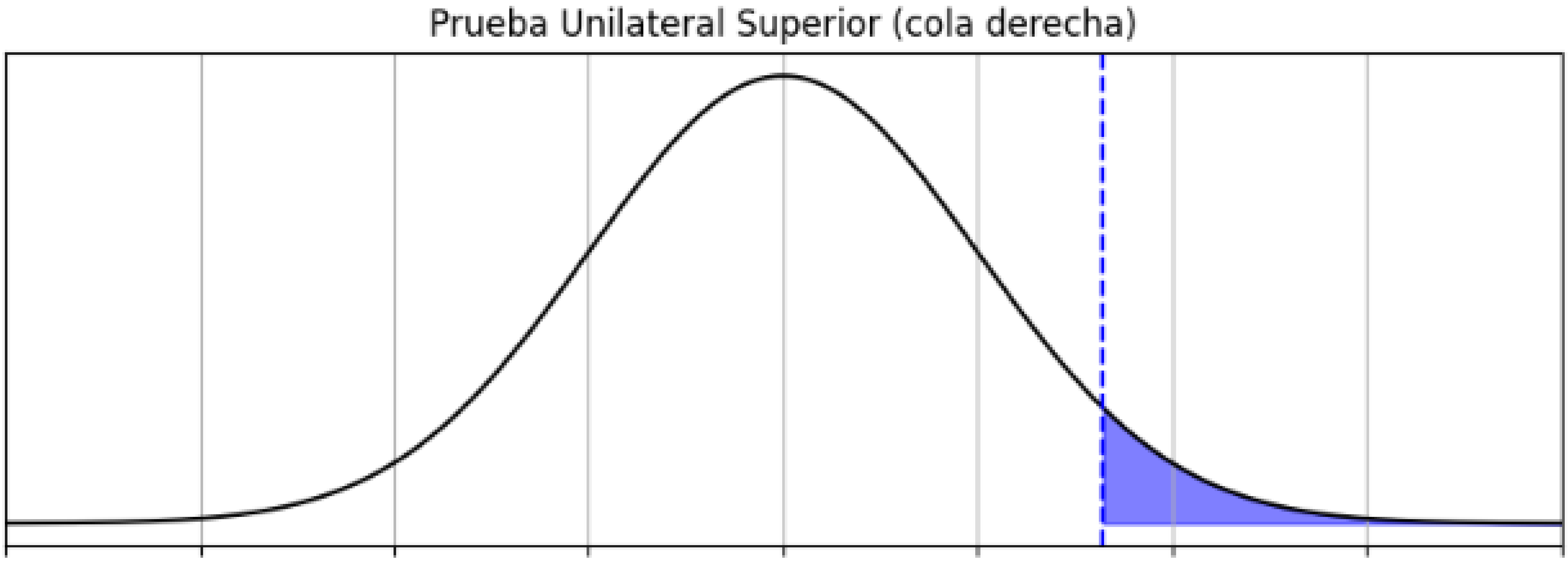
Se rechaza H_0. Hay evidencia estadística (al 5% de significación) de que la media **ya no es 500 mg** → ¡la máquina debe revisarse!

✅ 2. Prueba unilateral superior (cola derecha)

Se analiza solo el extremo derecho.

- $H_0 : \mu \leq \mu_0$
- $H_1 : \mu > \mu_0$

👉 Rechazamos H_0 si el valor observado es mucho mayor que μ_0


Prueba Unilateral Superior (cola derecha)

□ ¿Qué representa este gráfico?

El gráfico muestra una **distribución normal estándar** $N(0, 1)$, utilizada en pruebas de hipótesis cuando se conoce la desviación estándar o cuando se trabaja con muestras grandes.

✅ Elementos claves del gráfico

🔷 1. Curva negra (distribución normal)

Representa cómo se distribuyen los valores del estadístico de prueba bajo la **hipótesis nula** H_0.

🔷 2. Zona azul sombreada (cola derecha)

Corresponde a la **región crítica** o de **rechazo de** H_0.

En esta **prueba unilateral superior**, esa zona contiene el **nivel de significación** α, normalmente:

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow z_{\text{crítico}} \approx 1.645$$

◆ 3. Línea azul punteada vertical

Indica el valor crítico de z.

Si el estadístico calculado cae a la derecha de esta línea, se rechaza H_0.

🎯 Interpretación práctica

- Se quiere demostrar que el parámetro (ej. media μ) es **mayor** que cierto valor.
- Ejemplo típico:

> ¿Ha aumentado el promedio de ventas después de una campaña publicitaria?

Hipótesis del ejemplo

- $H_0 : \mu \leq \mu_0$ (el promedio no ha aumentado)
- $H_1 : \mu > \mu_0$ (el promedio sí ha aumentado)

📌 Decisión

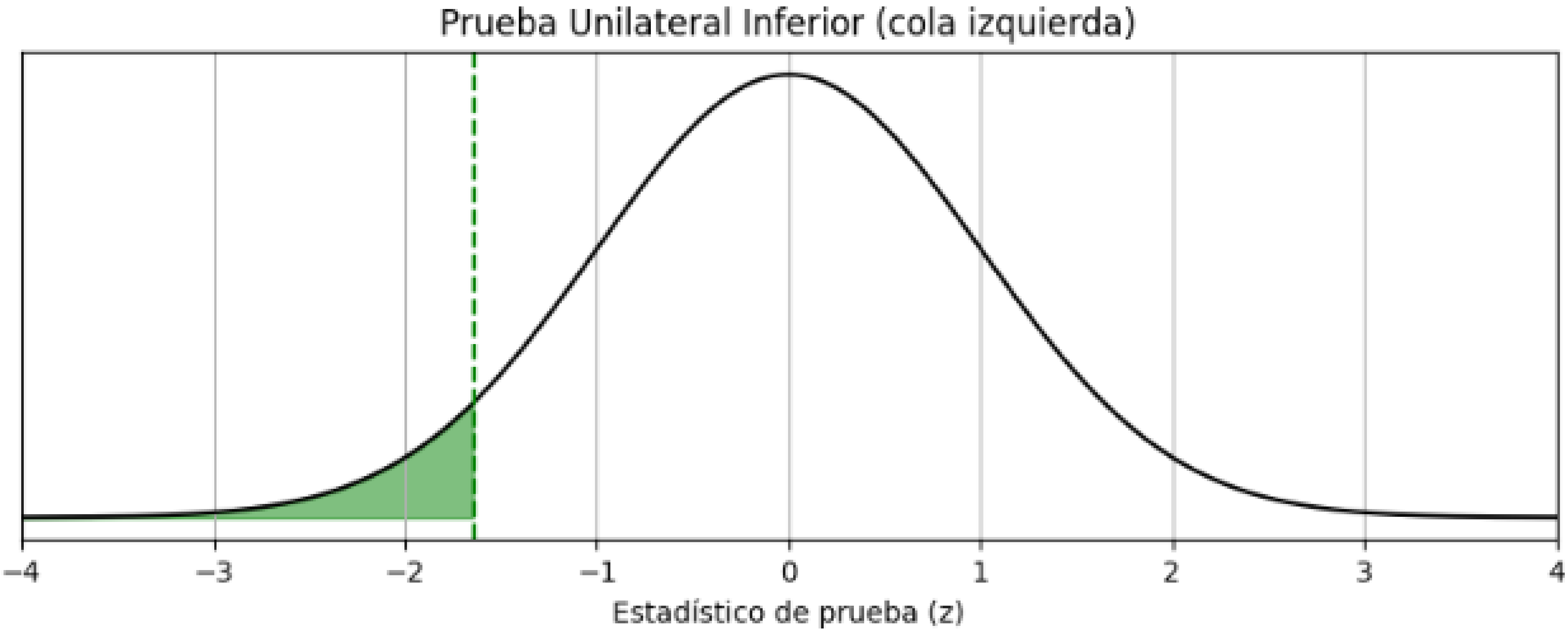
- Si el valor de z cae **en la zona blanca → no se rechaza** H_0
- Si cae **en la zona azul** (derecha) → **se rechaza** H_0, indicando que hay evidencia suficiente para aceptar que $\mu > \mu_0$

✅ 3. Prueba unilateral inferior (cola izquierda)

Se analiza solo el extremo izquierdo.

- $H_0 : \mu \geq \mu_0$
- $H_1 : \mu < \mu_0$

👉 Rechazamos H_0 si el valor observado es **mucho menor** que μ_0


Prueba Unilateral Inferior (cola izquierda)
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
Estadístico de prueba (z)

📊 Análisis del Gráfico: Prueba Unilateral Inferior

✅ ¿Qué muestra el gráfico?

- **Curva negra:** Distribución normal estándar, centrada en 0.
- **Zona verde sombreada (cola izquierda):** Región crítica o zona de rechazo de la hipótesis nula H_0.
- **Línea verde punteada:** Límite del valor crítico, alrededor de $z = -1.645$ si $\alpha = 0.05$.

✅ ¿Qué muestra el gráfico?

- **Curva negra:** Distribución normal estándar, centrada en 0.
- **Zona verde sombreada (cola izquierda):** Región crítica o zona de rechazo de la hipótesis nula H_0.
- **Línea verde punteada:** Límite del valor crítico, alrededor de $z = -1.645$ si $\alpha = 0.05$.

🎓 Ejemplo en Educación: Evaluación del Rendimiento Estudiantil

🔍 Contexto:

Una institución educativa sostiene que los estudiantes de primer semestre obtienen un puntaje promedio de **70/100** en la prueba diagnóstica de matemáticas. Sin embargo, luego de un cambio en la malla curricular, se sospecha que el rendimiento ha **bajado**.

Se desea comprobar estadísticamente si el **nuevo promedio es menor a 70**.

📌 Hipótesis:

- Hipótesis nula H_0: $\mu \geq 70$

  (el promedio es igual o superior a 70)

- Hipótesis alternativa H_1: $\mu < 70$

  (el promedio ha disminuido)

Este es un caso de prueba unilateral inferior (cola izquierda).

📊 Datos del estudio:

- Tamaño de la muestra: $n = 36$ estudiantes
- Media muestral: $\bar{x} = 67.8$
- Desviación estándar poblacional conocida: $\sigma = 6$
- Nivel de significación: $\alpha = 0.05$

□ Cálculo del estadístico z:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{67.8 - 70}{6 / \sqrt{36}} = \frac{-2.2}{1} = -2.2$$

🎯 Decisión:

- Valor crítico (z) para $\alpha = 0.05$: -1.645
- Como $-2.2 < -1.645$, el estadístico **cae en la zona de rechazo**

✅ Conclusión:

Se rechaza la hipótesis nula.

Existe evidencia estadística para afirmar que **el rendimiento promedio ha disminuido** tras el cambio curricular.

Aplicaciones educativas

□ Ejemplo en educación:

Supón que una escuela implementa una nueva estrategia de enseñanza de lectura.

Se hace una prueba de hipótesis para comparar los promedios de comprensión lectora **antes y después**.

- H_0: la estrategia **no cambia** el rendimiento.
- H_1: la estrategia **sí mejora** el rendimiento.

Imagina que **en la realidad sí hay mejora**, pero tu muestra es muy pequeña o el efecto es débil. Entonces:

- **Tu análisis no rechaza** H_0.
- Pero en realidad **sí debiste rechazarla**.

👉 Has cometido un error tipo II.

📉 ¿Qué causa un error tipo II?

- Tamaño de muestra pequeño
- Alta variabilidad en los datos
- Efectos reales muy pequeños
- Elegir un nivel α demasiado bajo (más estricto)

APLICACIONES

🎓 Tema: Inteligencia Artificial en el Proceso Enseñanza-Aprendizaje

□ ¿Qué investigar?

Puedes explorar, por ejemplo:

- ¿Mejora la IA el rendimiento académico?
- ¿Reduce la IA el tiempo necesario para adquirir una competencia?
- ¿Influye la IA en la motivación o autonomía del estudiante?

✅ Paso 1: Formular una pregunta de investigación

Ejemplo:

> ¿El uso de herramientas de IA mejora el rendimiento en comprensión lectora en estudiantes universitarios?

✅ Paso 2: Plantear las hipótesis

🔷 Hipótesis nula H_0:

> *"No hay diferencia en el rendimiento entre estudiantes que usan IA y los que no."*
> Formalmente:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

◆ Hipótesis alternativa H_1:

a) **Bilateral (sin dirección definida):**

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

b) **Unilateral superior (si esperas mejora con IA):**

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

Donde:

- μ_1 = rendimiento medio con IA
- μ_2 = rendimiento medio sin IA

✅ Paso 3: Elegir la prueba estadística adecuada

Tipo de datos	Número de grupos	Prueba sugerida
Cuantitativos, normalidad	2 grupos (con IA vs sin IA)	t de Student para muestras independientes
Cuantitativos, sin normalidad	2 grupos	Mann-Whitney U
Pre y post test en el mismo grupo	1 grupo (antes/después IA)	t de Student para muestras relacionadas
Proporciones o porcentajes	2 grupos	prueba z de proporciones
Más de 2 grupos	Varios niveles de IA, por ejemplo	ANOVA o Kruskal-Wallis

□ Ejemplo específico:

Pregunta:

> ¿Mejora la IA el promedio en pruebas de redacción académica?

Diseño:

- Dos grupos:
  - Grupo A (con IA)
  - Grupo B (sin IA)

Datos:

- Media grupo A = 8.3 (sobre 10)
- Media grupo B = 7.5
- Nivel de significación $\alpha = 0.05$

Hipótesis:

- $H_0 : \mu_A = \mu_B$
- $H_1 : \mu_A > \mu_B$ (unilateral superior)

Prueba:

- Si hay normalidad → **t de Student**
- Si no hay normalidad → **Mann-Whitney U**

🎯 Recomendaciones para elegir la prueba:

1. **Tipo de variable dependiente** (cuantitativa, ordinal, categórica)
2. **Cantidad de grupos** (1, 2, más)
3. **Si los datos son independientes o relacionados**
4. **Distribución de los datos** (normalidad o no)

FIN